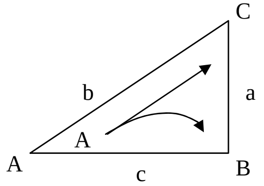
Promedio
GRUPO DE ESTUDIO

FORMULARIO DE TRIGONOMETRIA

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO



$$SenA = \frac{c.opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{b} \qquad CscA = \frac{hipotenusa}{c.opuesto} = \frac{b}{a}$$

$$CosA = \frac{c.adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{b} \qquad SecA = \frac{hipotenusa}{c.adyacente} = \frac{b}{a}$$

$$TanA = \frac{c.opuesto}{c.adyacente} = \frac{a}{c} \qquad CotA = \frac{c.adyacente}{c.opuesto} = \frac{c}{a}$$

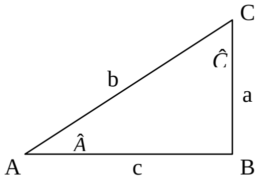
Propiedades:

1. Razones Recíprocas

SenA . CscA = 1
CosA . SecA = 1
TanA . CotA = 1

- $SenA = \frac{1}{CscA}$ * $CosA = \frac{1}{SecA}$ * $TanA = \frac{1}{CotA}$
- $CscA = \frac{1}{SenA}$ * $SecA = \frac{1}{CosA}$ * $CotA = \frac{1}{TanA}$

2. Razones de ángulos complementarios

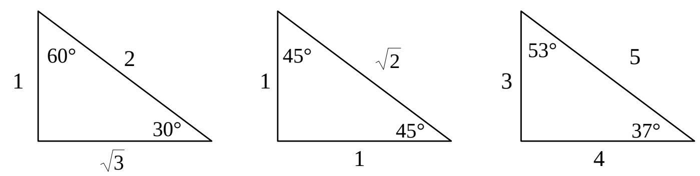


Si: $\hat{A} + \hat{C} = 90°$
Raz. ($\hat{A}$) = Co – Raz ($\hat{C}$)

Son **Co – Razones**
Seno y **<u>Co</u>**seno
Tangente y **<u>Co</u>**tangente
Secante y **<u>Co</u>**secante

$SenA = CosC$ $\quad TanA = CotC$ $\quad SecA = CscC$
$CosA = SenC$ $\quad CotA = TanC$ $\quad CscA = SecC$

3. Triángulos Notables

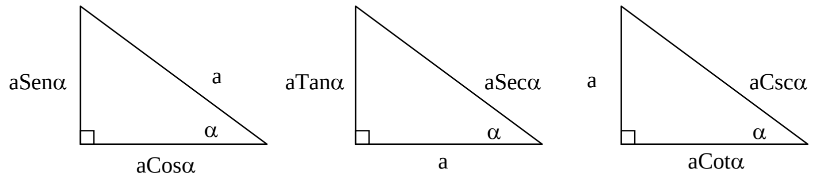


RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

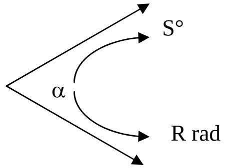
Datos: Un lado y un ángulo agudo
Incógnita: los demás lados
Procedimiento:

a) Repetir el lado que tengo en el lado que quiero calcular
b) Multiplicarlo por la razón trigonométrica

$$\text{Razón trigonométrica} = \frac{\text{Lado que quiero calcular}}{\text{Lado que tengo}}$$



ÁNGULOS TRIGONOMETRICOS

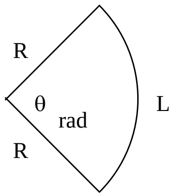


$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}}$$

S: # de grados sexagesimales de "α"
R: # de radianes de "α"

$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$ $\boxed{1\pi \text{ rad} \approx 57°17'45''}$

LONGITUD DE ARCO

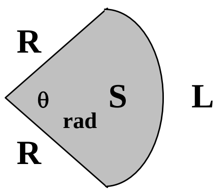


$$\boxed{\theta = \frac{L}{R}}$$

$$\boxed{L = \theta.R \quad R = \frac{L}{\theta}}$$

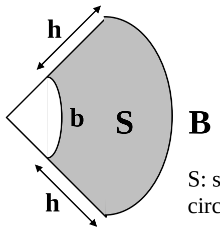
θ: # radianes del ángulo
L: longitud de arco
R: radio

SUPERFICIE DEL SECTOR CIRCULAR



$$\boxed{S = \frac{L.R}{2} = \frac{\theta.R^2}{2} = \frac{L^2}{2.\theta}}$$

Superficie del trapecio circular



$$\boxed{S = \left(\frac{B+b}{2}\right)h}$$

S: superficie del trapecio circular

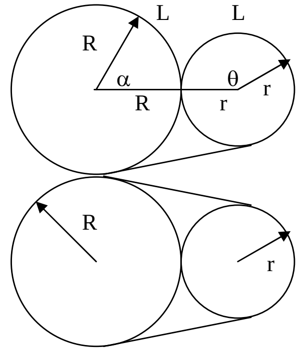
Poleas

Longitudes recorridas iguales

$\boxed{\alpha . R = \theta . r}$

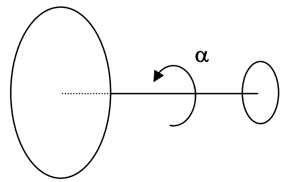
$\boxed{N . R = n . r}$

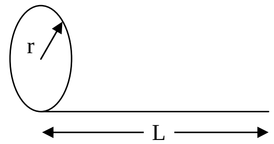
N: # de vueltas de la polea mayor
n: # de vueltas de la polea menor



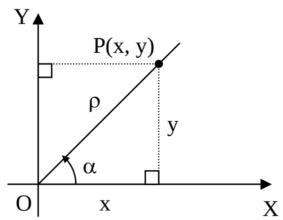
ANGULOS GIRADOS IGUALES

$$\boxed{\# \text{ de vueltas} = \frac{L}{2\pi r}}$$





RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ÁNGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD.



$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

ρ: radiovector de "P"
x: abscisa de "P"
y: ordenada de "P"

$$Sen\alpha = \frac{ordenada}{radiovector} = \frac{y}{\rho} \qquad Cot\alpha = \frac{abscisa}{ordenada} = \frac{x}{y}$$

$$Cos\alpha = \frac{abscisa}{radiovector} = \frac{x}{\rho} \qquad Sec\alpha = \frac{radiovector}{abscisa} = \frac{\rho}{x}$$

$$Tan\alpha = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{y}{x} \qquad Csc\alpha = \frac{radiovector}{ordenada} = \frac{\rho}{y}$$

Propiedad

R.T. [K vueltas + α] = R.T. [α]

Signos de las Razones Trigonométricas

Sen Csc (+)	Todas son (+)
Tan Cot (+)	Cos Sec (+)

	IQ	IIQ	IIIQ	IVQ
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-
Cotangente	+	-	+	-
Secante	+	-	-	+
Cosecante	+	+	-	-

Razones de Ángulos cuadrantales

	0°	90°	180°	270°
Seno	0	1	0	-1
Coseno	1	0	-1	0
Tangente	0	No existe	0	No existe
Cotangente	No existe	0	No existe	0
Secante	1	No existe	-1	No existe
Cosecante	No existe	1	No existe	-1

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Identidades Fundamentales

Recíprocas

Sen x . Cscx = 1
Cos x . Secx = 1
Tan x . Cotx = 1

Por Cociente

$$Tanx = \frac{Senx}{Cosx}$$

$$Cotx = \frac{Cosx}{Senx}$$

Pitagóricas

$Sen^2x . Csc^2x = 1$

$Sec^2x = 1 + Tan^2x$
$Csc^2x = 1 + Cot^2x$

* $Sen^2x = 1 – Cos^2x$
* $Cos^2x = 1 – Sen^2x$

Identidades Auxiliares

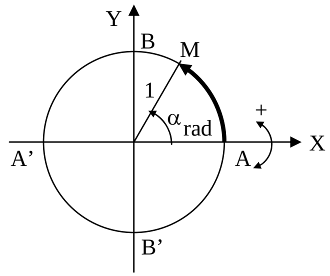
$Sen^4x + Cos^4x = 1 – 2Sen^2x.Cos^2x$
$Sen^6x + Cos^6x = 1 – 3Sen^2x.Cos^2x$
$Sec^2x + Csc^2x = Sec^2x.Csc^2x$
Tanx + Cotx = Secx . Cscx

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

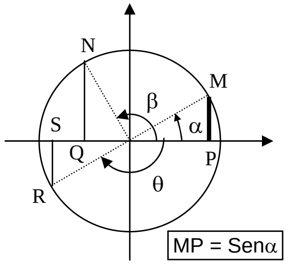
Circunferencia Trigonométrica
Elementos:
A (1; 0): Origen de arcos
B (0; 1): Origen de complementos

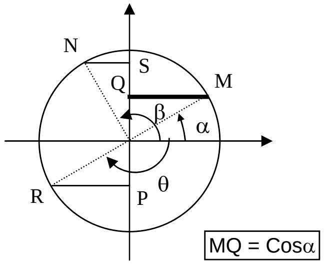
A' (-1; 0): Origen de suplementos
M: Extremo del arco

$\overset{\frown}{AM} = \alpha$

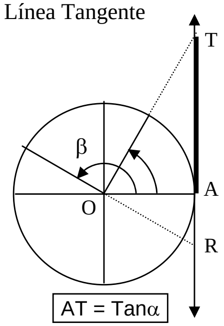


Líneas Trigonométricas
Línea Seno
Línea Coseno

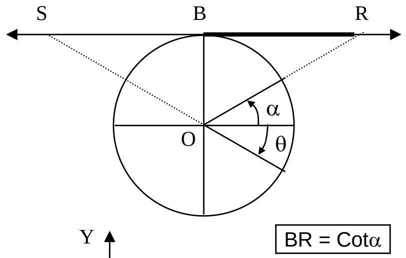




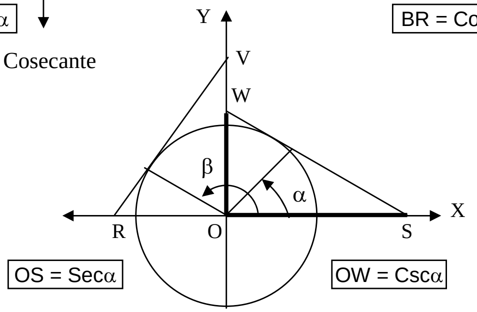
Línea Tangente



Línea Cotangente



Línea Secante y Cosecante



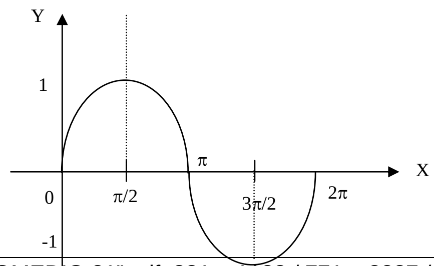
ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

En el siguiente análisis se consideran :

a) Razones trigonométricas de ángulos cuadrantales
b) Variación de las razones trigonométricas
c) Extensión de las razones trigonométricas

Función Seno
Y = Sen x

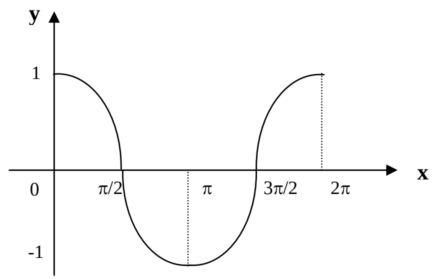
X	Y
0	0
π/2	1
π	0
3π/2	-1
2π	0



Dominio: R
Rango: [-1; 1]
Período: 2π
Extensión: -1 ≤ Sen x ≤ 1

Función Coseno
y = Cos x

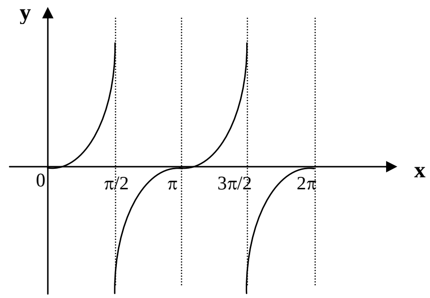
X	Y
0	1
π/2	0
π	-1
3π/2	0
2π	0}1



Dominio: R
Rango: [-1; 1]
Período: 2π
Extensión: -1 ≤ Cos x ≤ 1

Función Tangente
Y = Tan x

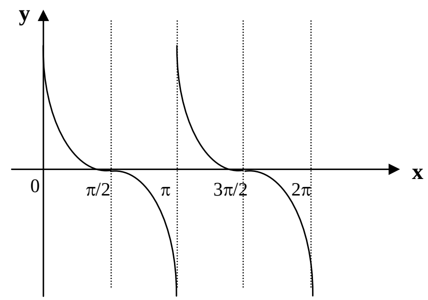
X	Y
0	0
π/2	No ∃
π	0
3π/2	No ∃
2π	0



Dominio: R – (2n + 1) π/2; n ∈ Z
Rango: R
Período: π
Extensión: - ∞ < Tan x < ∞

Función Cotangente
Y = Cot x

X	Y
0	No ∃
π/2	0
π	No ∃
3π/2	0
2π	No ∃

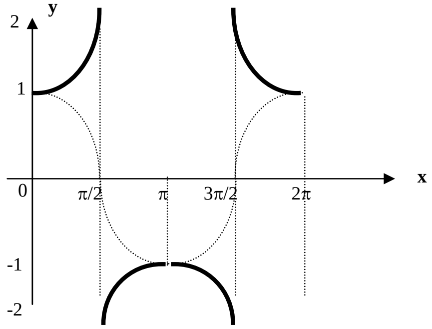


Dominio: R - nπ; n ∈ Z
Rango: R
Período: π

Extensión: - ∞ < Cot x < ∞

Función Secante
y = Sec x

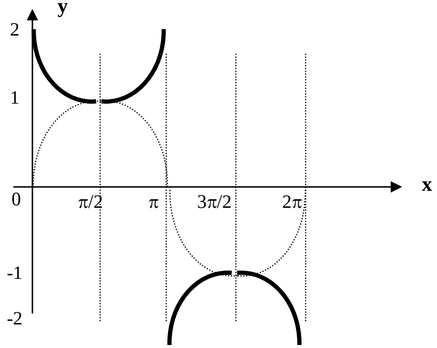
X	Y
0	1
π/2	No ∃
π	-1
3π/2	No ∃
2π	1



Dominio: R – (2n + 1) π/2
Rango: <-∞; -1] U [1; ∞>
Período: 2π
Extensión: Secx ≥ 1 ó Sec x ≤ -1

Función Cosecante
y = Csc x

X	Y
0	No ∃
π/2	1
π	No ∃
3π/2	-1
2π	No ∃

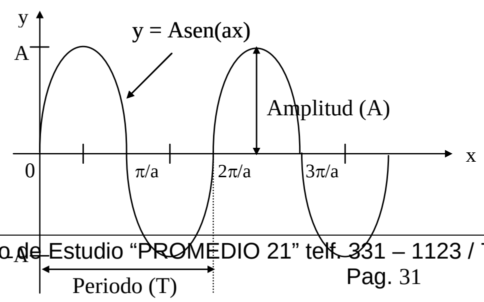


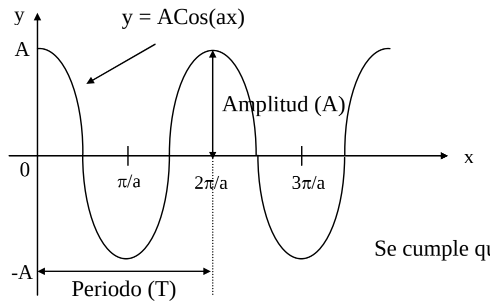
Dominio: R - nπ
Rango: <-∞; -1] U [1; ∞>
Período: 2π
Extensión: Csc x ≥ 1 ó Csc x ≤ -1

AMPLITUD Y PERIODO

Dada las funciones trigonométricas $f = \{(x;y)/\, y = ASen(ax)\}$
$f = \{(x;y)/\, yACos(ax)\}$

Cuyo gráfico en el plano coordenado es:





Se cumple que: Amplitud = A
Periodo = T = 2π/a

ÁNGULOS COMPUESTOS

Funciones trigonométricos de la suma de dos ángulos

Sen (x + y) = Senx.Cosy + Cosx.Seny
Cos (x + y) = Cosx.Cosy – Senx.Seny
Tan (x + y) = $\dfrac{Tanx - Tany}{1 + Tanx.Tany}$

Funciones trigonométricas de las diferencia de dos ángulos

Sen (x – y) = Senx.Cosy – Cosx.Seny
Cos (x – y) = Cosx.Cosy + Senx.Seny
Tan (x – y) = $\dfrac{Tanx - Tany}{1 + Tanx.Tany}$

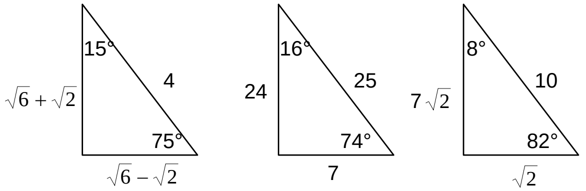
Funciones trigonometrías de (-x) a funciones trigonométricas de (x)

Sen (-x) = -Senx	Cot (-x) = - Cotx
Cos (-x) = Cosx	Sec (-x) = Secx
Tan (-x) = Tanx	Csc (-x) = - Cscx

Razones trigonométricas de 75°

$\left.\begin{matrix} Sen \\ Cos \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4} \quad \left.\begin{matrix} Tan \\ Co\tan \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \pm \sqrt{3} \quad \left.\begin{matrix} Sec \\ Co\sec \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{6} \pm \sqrt{2}$

Triángulos Notables



Propiedades

$$\text{Tanx} + \text{Tany} + a\text{Tanx.Tany} = a \Rightarrow a = \text{Tan}(x+y)$$
$$\text{Sen}(x+y).\text{Sen}(x-y) = \text{Sen}^2x - \text{Sen}^2y$$
$$\text{Cos}(x+y).\text{Cos}(x-y) = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2y$$
$$\text{Tanx} \pm \text{Tany} = \frac{Sen(x \pm y)}{Cosx.Cosy}$$

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

I. Ángulos menores de una vuelta.

$$F\begin{bmatrix}180° \pm x \\ 360° \pm x\end{bmatrix} = (\pm)F(x)$$

$$F\begin{bmatrix}90° \pm x \\ 270° \pm x\end{bmatrix} = (\pm)coF(x)$$

$x \Rightarrow$ ángulo agudo

II. Ángulos mayores de una vuelta.

$\beta \Rightarrow$ ángulo mayor de una vuelta
$\alpha \Rightarrow$ ángulo menor de una vuelta

$$\begin{array}{l|l} \beta & 360° \\ \hline \alpha & k \end{array}$$

$$F[\beta] = F[k(360°) + \alpha] = F[\alpha]$$

III. Ángulos negativos

En este caso emplearemos las relaciones de: $F[-x] \alpha F[x]$

ÁNGULOS RELACIONADOS ENTRE SÍ

- $x + y = 180° \Rightarrow$ Senx = Seny; Cscx = Cscv — ***Ángulos suplementarios***
- $x - y = 180° \Rightarrow$ Tanx = Tany; Cotx = Cotv
- $x + y = 360° \Rightarrow$ Cosx = Cosy; Secx = Secv

Nota: En todos los casos, las demás funciones son iguales; pero con signo cambiado

Propiedades

Si: $x + y + z = 180°$

$$\text{Tan}\,x + \text{Tan}\,y + \text{Tan}\,z = \text{Tan}\,x\,\text{Tan}\,y\,\text{Tan}\,z$$
$$\text{Cotx.Coty} + \text{Cotx.Cotz} + \text{Coty.Cotz} = 1$$

Si: $x + y + z = 90°$

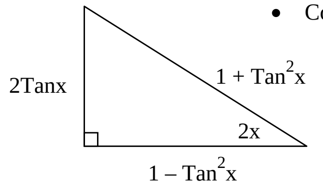
$$\text{Tanx.Tany} + \text{Tanx.Tanz} + \text{Tany.Tanz} = 1$$
$$\text{Cotx} + \text{Coty} + \text{Cotz} = \text{Cotx.Coty Cotz}$$

ANGULOS MULTIPLES

Funciones Trigonométricas del ángulo doble

$$\text{Sen}2x = 2\text{SenxCosx}$$
$$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$$
$$\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$$
$$\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$$
$$\text{Tan}2x = \frac{2Tanx}{1 - Tan^2x}$$

Triángulo notable



- $\text{Sen}2x = \dfrac{2Tanx}{1 + Tan^2x}$
- $\text{Cos}2x = \dfrac{1 - Tan^2x}{1 + Tan^2x}$

PROPIEDADES

$$1 - Cos2x = 2Sen^2x$$
$$1 + Cos2x = 2Cos^2x$$

$$Cotx + Tanx = 2Csc2x$$
$$Cotx - Tanx = 2Cot2x$$

Funciones trigonométricas del ángulo mitad

$$Sen\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{2}} \qquad Tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{1+Cosx}}$$

$$Cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{2}} \qquad Cot\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{1-Cosx}}$$

Nota: El sino (±) depende al cuadrante al que pertenece “x/2”

$$Tan\frac{x}{2} = Cscx - Cotx$$
$$Cot\frac{x}{2} = Cscx + Cotx$$

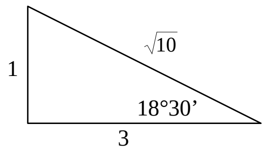
Fórmulas racionalizadas

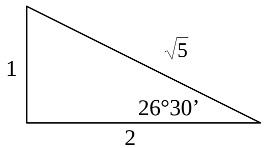
Razones trigonométricas de 22°30’

$$Sen22°30 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad Tan22°30' = \sqrt{2} - 1$$

$$Cos22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad Cot22°30' = \sqrt{2} + 1$$

También son importantes:





TRANSFORMACIONES DE UNA SUMA O DIFERENCIA A PRODUCTO

$$SenA + SenB = 2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$SenA - SenB = 2Cos\left(\frac{A+B}{2}\right)Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$CosA + CosB = 2Cos\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$CosA - CosB = -2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$CosB - CosA = 2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

A > B

TRANSFORMACIÓN DE UN PRODUCTO A SUMA O DIFERENCIA

$$2SenxCosy = Sen(x+y) + Sen(x-y)$$
$$2CosxSeny = Sen(x+y) - Sen(x-y)$$
$$2CosxCosy = Cos(x+y) + Cos(x-y)$$
$$2SenxSeny = Cos(x-y) - Cos(x+y)$$

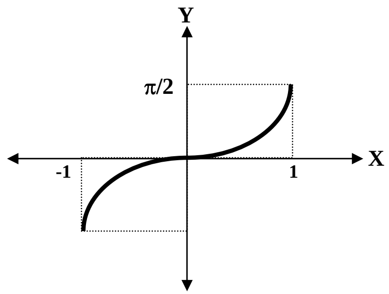
FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

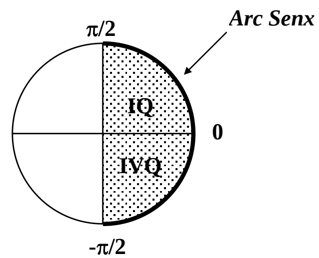
Si: F(x) = m ⇒ $\boxed{x = arc\ F(m)}$

a) Función Seno inverso: y = arc Senx

Domino: [-1; 1]

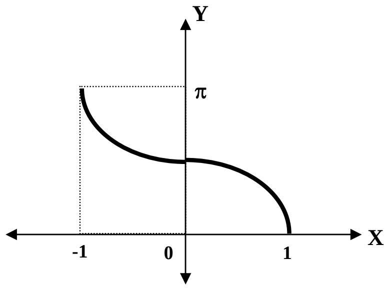
Rango: $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

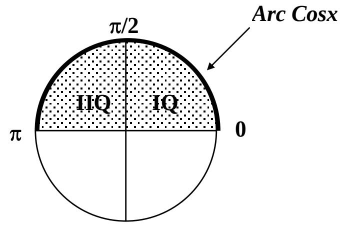




b) Función coseno inverso: y = arc Cosx

Domino: [-1; 1]
Rango : [0; π]





"La función directa anula la inversa y viceversa"

Sen (arc Senm) = m; m ∈ [-1; 1]	arc Sen (Sen θ) = θ; θ ∈ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
Cos (arc Cosm) = m; m ∈ [-1; 1]	arc Cos (Cos θ) = θ; θ ∈ [0; π]
Tan (arc Tanm) = m; m∈ R	arc Tan (Tan θ) = θ; θ ∈ $\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

arc Senx = arcCsc $\frac{1}{x}$
arc Cosx = arcSec $\frac{1}{x}$
arc Tanx = arcCot $\frac{1}{x}$

arc Senx + arcCosx = $\frac{\pi}{2}$
arc Tanx + arcCotx = $\frac{\pi}{2}$
arc Secx + arcCscx = $\frac{\pi}{2}$

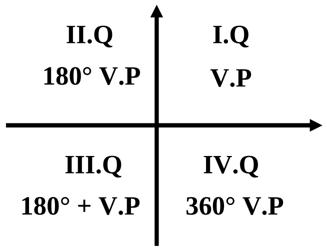
arcTanx + arc Tany = arc Tan $\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$
arcTanx – arc Tany = arc Tan $\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

arc Sen (-x) = - arcSenx
arc Cos (-x) = π - arc Cosx
arc Tan (-x) = - arc Tanx

ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

Dada la ecuación: F (x) = m

1. Calculamos el menor ángulo agudo que cumple la igualdad en valor absoluto (valor principal)
2. Determinamos los cuadrantes donde puede estar "x", de acuerdo al valor que toma "m"
3. luego encontramos las soluciones elementales a través del siguiente cuadro:



4. Finalmente, evaluamos las demás soluciones:

Ejemplo: Si: x ∈ IQ ∧ IIIQ
Las soluciones serán las siguientes:

x_1 = V.P
x_2 = 180° + V.P
x_3 = 360° + x_1
x_4 = 360° + x_2
x_5 = 720° + x_1
x_6 = 720° + x_2
etc.

Soluciones elementales

FORMULAS GENERALES

Para seno y cosecante: Senx = m

$x_G = n(180°) + (-1)^n \alpha$
$x_G = n\pi + (-1)^n \alpha$

Para tangente y cotangente: Tanx = m

$x_G = n(180°) + \alpha$
$x_G = n\pi + \alpha$

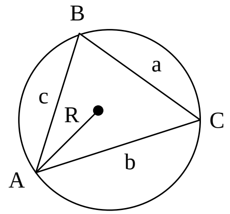
Para coseno y secante: Cosx = m

$$x_G = n\,(360°) \pm \alpha$$
$$x_G = 2n\pi \pm \alpha$$

X_G: Conjunto de todos los ángulos que cumplen la ecuación
α : Menor ángulo positivo que cumple la ecuación
n : Número entero

RESOLUCIÓN DE TRIANGULOS OBLICUÁNGULOS

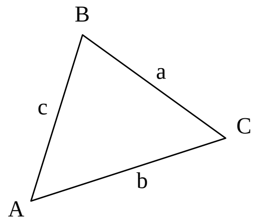
I. Teorema de los senos



$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC} = 2R$$

a = 2R Sen A
b = 2R Sen B
c = 2R Sen C

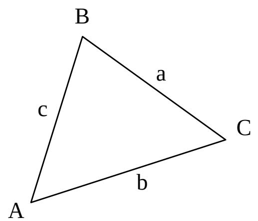
II. Teorema de los cosenos



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ Cos B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos C}$$

* $\text{Cos A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

III. Teorema de las proyecciones



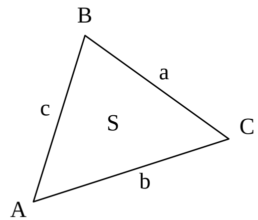
a = bCosC + cCosB

b = aCosC + cCosA

c = aCosB + bCosA

Exclusivo Universidad Agraria
.

ÁREA DE LA REGIÓN TRIANGULAR



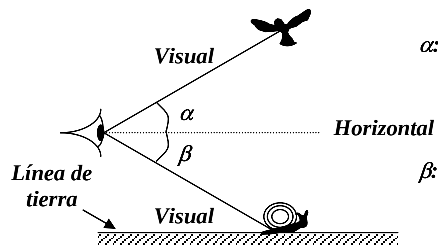
$$S = \frac{bc}{2} \text{ Sen A}$$
$$S = \frac{ac}{2} \text{ Sen B}$$
$$S = \frac{ab}{2} \text{ Sen C}$$

También son importantes:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S = \frac{abc}{4R}$$
$$S = pr$$

Donde:
a, b, c: lados del triángulo
p: semiperímetro
R: circunradio
r: inradio

ÁNGULOS VERTICALES



***α*:ángulo de elevación**

***β*:ángulo de depresión**

toni.